EX 4 :

1. $f(x)= x^5-2x^3+4$
   $f'(x)= 5x^4-6x^2$
   $f''(x)=20x^3-12x$
   $f^{(3)}(x) =60x^2-12$
   $f^{(4)}(x) = 120x$
   $f^{(5)}(x)=120$
   $f^{(n)}(x)=0$ pour $n>5$
2. $f(x) = \cos x$
   $f'(x)=-\sin x$
   $f''(x) = -\cos x$
   $f^{(3)}(x) = \sin x$

   $f^{(2n)}(x)=(-1)^n.\cos x$
   $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1}.\sin x$
   (on peut faire une démonstration par récurrence)
3. $f(x)= \sin(2x)$

   $f^{(2n)}(x)= (-1)^n.2^{2n}.\sin(2x)$
   $f^{(2n+1)}(x)= (-1)^n.2^{2n+1}.\cos(2x)$

EX 5 : $f(x) = a.x^3+b.x^2+c.x+d$
$f'(x) = 3a.x^2+2b.x+c$
$f''(x) = 6a.x+2b$
$f'''(x) =6a$

$f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 3a+2b+c=1 \\ 6a+2b=1 \\ 6a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=0 \\ c=\frac{1}{2} \\ d=\frac{1}{3} \end{cases}$$

D'où $f(x) = \frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$

EX 6

1. $f(x)=\frac{1}{x-1}$ $\quad g(x)=\frac{1}{x+1}$

   $f^{(3)}(x)=\frac{-6}{(x-1)^4}$ $\quad g^{(3)}(x)=\frac{-6}{(x+1)^4}$

2. a/ $h(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1})$ $\quad (a=b=\frac{1}{2})$

   $$h^{(3)}(x)=\frac{1}{2}\left[g^{(3)}(x)+f^{(3)}(x)\right]$$

   b/ $$=-3\left[\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{1}{(x+1)^4}\right]$$

EX 7: $f(2)=0$; $f'(2)=3$

1. Soit $h(x)= f(\sqrt{2+x})$ h est dérivable sur $]-2,+\infty[$ comme étant composée de fonctions dérivables et

$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}.f'(\sqrt{2+x})$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(\sqrt{2+x})}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2} \quad car\ h(2)=0$$
$$=h'(2)=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{3}{4}$$

2. Soit les fonctions $U(x)=2\sin(\frac{\pi x}{4})$ et $t(x)=f(U(x))$ t est dérivable sur IR comme étant composée de fonctions dérivables et

$t'(x)=U'(x).f'(U(x))=\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x}{4}).f'(U(x))$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(2\sin(\frac{\pi x}{4}))}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{t(x)-t(2)}{x-2}=t'(2)$$
$$=\frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi}{2}.f'(2)=0$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn